D. TRANSFORMADA DE HILBERT

Comúnmente las funciones o señales se definen completamente en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia, y la transformada de Fourier realiza un cambio de la función o señal de un dominio a otro. La transformada de Hilbert conforma la señal con la mitad de la información en el dominio del tiempo y la otra mitad en el dominio de la frecuencia (Huang et al., 1998).

La transformada de Hilbert esta definida como

$$s^*(t) = \frac{1}{\pi}\int \frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau, \tag{D.1}$$

que es equivalente a una rotación de 90°en la fase de cada componente armónica de la señal. Esencialmente esta ecuación define la transformada de Hilbert como la convolución de la función $s(t)$ con $1/t$, por consecuencia enfatiza las propiedades locales de $s(t)$ (Huang et al., 1998).

La transformada de Hilbert puede ser calculada de varias formas, entre ellas:

1. en el caso de tener una función (p.e.: funciones armónicas) se puede aplicar directamente la transformada de Hilbert (ecuación D.1).

2. determinación a partir de $s(t)$ aplicando el operador lineal de convolución (operador normalizado de Hilbert)

   $$h(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(\pi t/2)}{t}, \;\; t \neq 0 \text{ y } h(t) = 0, \;\; n = 0,$$

   de la forma $s(t) * h(t)$, lo que es equivalente a aplicar un filtro.

3. utilizando la transformada discreta

   $$\mathcal{H}\{s(t)\} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t-n\Delta t)\frac{\sin^2(\pi n/2)}{n}, \;\; n \neq 0,$$

   (Scheuer y Oldenburg, 1988, entre otros).

4. reduciendo a una representación de fasor si $s(t)$ es un sinusoide, esto es, si $s(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ entonces $s^*(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ para valores reales de A y ϕ con $\omega > 0$ (Taner et al., 1979),

5. A partir de una transformada de Fourier, pasando al dominio de frecuencias la señal analítica, $\mathcal{F}^+\{\hat{s}(t)\}$ con $\hat{s}(t)$ de la forma $\hat{s}(t) = s(t) + i0$, luego multiplicando por una

función escalón unitario (eliminando la parte negativa de ω en el dominio de las frecuencias) y finalmente haciendo una transformación inversa de Fourier ($\mathcal{F}^{-}\{\hat{S}(\omega)\}$), con lo cual se obtiene $\hat{s}(t) = s(t)+is^{*}(t)$, que es equivalente a $(\delta_t+i\hat{s}(t))\cdot s(t)$ (Claerbout, 1992).

El método utilizado en este proyecto para calcular la transformada de Hilbert es el de la transformada de Fourier (número 5 en la lista anterior), ya que este es rápido.